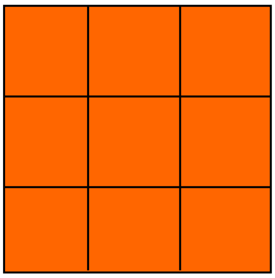
Radiciação

O que é, afinal, raiz quadrada de um número?

Vamos supor um quadrado com este, divididos em 9 quadradinhos iguais.



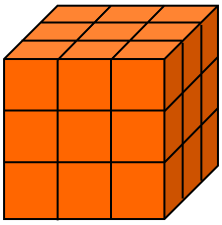
Pegando cada quadradinho como unidade de área, podemos dizer que a área do quadrado é 9 quadradinhos, ou seja, $\mathbf{3^2 = 9}$.

Vamos ver a situação no sentido inverso de raciocínio. Sabendo que a área do quadrado é 9 quadradinhos e que a medida do lado do quadradinho é 1 unidade de comprimento (1 u.c.), vamos calcular a medida do lado do quadrado em u.c.. Essa medida é dada por um número que elevado ao quadrado dá 9. Esse número é a raiz quadrada de 9.

Logo: $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$.

Assim, podemos dizer que a raiz quadrada de 9 representa o valor do lado do quadrado (que é 3) de área 9.

Vamos a outro exemplo.
Seja o cubo abaixo, divididos em 27 cubinhos iguais.



Logo, sendo cada cubinho uma unidade de volume (u.v.), podemos dizer que o volume do cubo é 27 u.v. ($3^3 = 27$).

Inverter a situação é calcular a medida da aresta do cubo. Sabendo que o cubo tem volume igual a 27 e que a medida da aresta de um cubinho é 1 u.v., podemos dizer que este número (27) elevado ao cubo (3) é igual a 27. Esse número é a raiz cúbica de 27.

Logo: $\sqrt[3]{27} = 3$, pois $3^3 = 27$.

Assim, podemos dizer que a raiz cúbica de 27 representa o valor da aresta do cubo (que é 3) de volume 27.

Raiz de um número real

Veja as seguintes raízes:

1º) $\sqrt{16} = 4$, pois $4^2 = 16$

2º) $\sqrt{\dfrac{1}{25}} = \dfrac{1}{5}$, pois $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$

3º) $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$

4º) $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$

Generalizando, sendo *n* um número natural maior ou igual a 2, chama-se raiz enésima de *a* o número real *b*, tal que:

raiz

índice

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \quad \Leftrightarrow \quad b^n = a}$$

radical

radicando

Lê-se: Raiz enésima de *a* é igual a *b.*

→ Casos que podem ocorrem com $\sqrt[n]{a}$.

1º) a ≥ 0 e n é par ou ímpar

A raiz *b* sempre será um número real positivo ou zero.

Exemplos:

a) $\sqrt{9} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 = 9$

b) $\sqrt[3]{8} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8$

c) $\sqrt[4]{16} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2^4 = 16$

d) $\sqrt[5]{0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0^5 = 0$

2º) a < 0 e n é par

Não existe a raiz *b*, ou seja, não existe raiz de índice par de um número negativo.

Exemplos:

a) $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$, pois não existe um número real que elevado ao quadrado que resulte em –9.

b) $\sqrt[4]{-64} \notin \mathbb{R}$, pois não existe um número real que elevado na quarta que resulte em –64.

3º) a < 0 e n é ímpar

A raiz *b* sempre será um número real negativo.

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8$

b) $\sqrt[5]{-1} = -1 \Leftrightarrow (-1)^5 = -1$

Observação

$\sqrt[1]{a} = a$

$\sqrt[0]{a}$ não tem sentido matemático

Propriedades dos radicais

Primeira Propriedade

→ Se n é natural ímpar, então: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

→ Se n é natural par não-nulo, então: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \sqrt[n]{a^n} = |a|$

Exemplos:

a) $\sqrt[3]{4^3} = 4$

b) $\sqrt[5]{(-5)^5} = -5$

c) $\sqrt{4^2} = 4$

d) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$

Segunda Propriedade

A raiz enésima de um produto é igual ao produto das raízes enésimas dos fatores.

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

Exemplos:

a) $\sqrt{4.9} = \sqrt{4}.\sqrt{9}$

b) $\sqrt[3]{3.5} = \sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{5}$

c) $\sqrt{2.3.4} = \sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{4}$

d) $\sqrt[4]{2.a.b} = \sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{a}.\sqrt[4]{b}$

Terceira Propriedade

A raiz enésima de um quociente é igual ao quociente das raízes enésimas dos termos da divisão.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplos:

a) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}}$

c) $\sqrt{\frac{2.a}{5}} = \frac{\sqrt{2.a}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{a}}{\sqrt{5}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{5}{18}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{18}}$

Quarta Propriedade

Multiplicando-se ou dividindo-se o índice de um radical e o expoente do radicando por um mesmo número *p* diferente de zero, o valor do radical não se altera.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}}$$

Exemplos:

a) $\sqrt{3^4} = \sqrt[2:2]{3^{4:2}} = 3^2 = 9$

b) $\sqrt[8]{3^{20}} = \sqrt[8:4]{3^{20:4}} = \sqrt[2]{3^5} = \sqrt{2^5}$

c) $\sqrt{3^3} = \sqrt[2.2]{3^{3.2}} = \sqrt[4]{3^6}$

d) $\sqrt[6]{a^2.b^4} = \sqrt[6]{\left(a.b^2\right)^2} = \sqrt[6:2]{\left(a.b^2\right)^{2:2}} = \sqrt[3]{a.b^2}$

Quinta Propriedade

Se a é um número real positivo, m é um número inteiro e n é um número natural diferente de zero, então:

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Exemplos:

a) $4^{2/3} = \sqrt[3]{4^2}$

b) $\sqrt{2} = 2^{1/2}$

c) $6^{4/5} = \sqrt[5]{6^4}$

d) $4^{-1/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Sexta Propriedade

Para se extrair a raiz de um radical, multiplicam-se os índices dos radicais e conserva-se o radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}}$$

Exemplos:

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[5.3]{4} = \sqrt[15]{4}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \sqrt[2.3.2]{x} = \sqrt[12]{x}$

c) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{\sqrt{12}}} = \sqrt[4.5.2]{12} = \sqrt[40]{12}$

d) $\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a.a^4}} = \sqrt[3.4]{a^5} = \sqrt[12]{a^5}$

Adição e Subtração de Radicais

A **adição** e **subtração** de radicais é realizada quando os radicais são semelhantes (*mesmo índice e mesmo radicando*).

Exemplos:

a) $8\sqrt{5}+3\sqrt{5}-6\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

b) $3\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}=4\sqrt{2}+2\sqrt{3}=2\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

c) $\sqrt{12}+\sqrt{75}=\sqrt{2^2.3}+\sqrt{3.5^2}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

Cuidado

$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$

$\sqrt{5}-\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$

Multiplicação e Divisão de Radicais

A **multiplicação e divisão** de radicais é realizada quando os radicais tiverem o mesmo índice (utilizamos a segunda e terceira propriedades). Neste caso, basta multiplicarmos os radicando conservando o índice.

Exemplos:

a) $\sqrt{10}$ x $\sqrt{5}=\sqrt{10.5}=\sqrt{50}=\sqrt{5^2.2}=5\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{10}:\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10:5}=\sqrt[3]{2}$

Se os radicais tiverem índices diferentes, deve-se tirar o MMC dos índices, dividir o MMC pelos índices antigos e multiplicar o resultado pelos expoentes dos radicandos.
Exemplos:

a) $\sqrt[3]{a^2}$ x $\sqrt{b}$

Temos: MMC(2, 3) = 6, ou seja, o mínimo múltiplo comum entre os índices 2 e 3 é 6.

$\sqrt[3]{a^2}$ x $\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^4}$ x $\sqrt[6]{b^3}=\sqrt[6]{a^4.b^3}$

b) $\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}$

Temos: MMC(4, 3) = 12, ou seja, o mínimo múltiplo comum entre os índices 4 e 3 é 12.

$\sqrt[4]{a^3}:\sqrt[3]{a}=\sqrt[12]{a^9}:\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[12]{a^9:a^4}=\sqrt[12]{a^5}$

Racionalização de denominadores

Vamos considerar o quociente de 3 por $\sqrt{2}$. Podemos indicar por $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Temos no denominador o número irracional $\sqrt{2}$. Se multiplicarmos o numerador e o denominador por este número irracional o quociente não se altera. Fazendo isto, iremos obter um número racional (sem raiz) no denominador. A esse procedimento chamamos de **racionalização de denominadores.**

Temos 3 principais casos de racionalização:

1º) Raiz quadrada no denominador:

Exemplos:

a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por $\sqrt{2}$, que é *o fator racionalizante* da fração.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

b) $\dfrac{5}{3\sqrt{5}}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por $\sqrt{5}$, que é *o fator racionalizante* da fração.

$$\frac{5}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{25}} = \frac{5\sqrt{5}}{3.5} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2º) Raiz de índice diferente de dois no denominador:

Exemplos:

a) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{5}}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por $\sqrt[4]{5^3}$ (o expoente deste radicando (3) é obtido pela diferença do índice do radical (4) e do expoente do radicando (1)), que é *o fator racionalizante* da fração.

$$\frac{3}{\sqrt[4]{5}} \cdot \frac{\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^3}} = \frac{3\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{3\sqrt[4]{5^3}}{5}$$

b) $\dfrac{a}{\sqrt[7]{a^3}}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por $\sqrt[7]{a^4}$ (o expoente deste radicando (4) é obtido pela diferença do índice do radical (7) e do expoente do radicando (3)), que é *o fator racionalizante* da fração.

$$\frac{a}{\sqrt[7]{a^3}} \cdot \frac{\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^4}} = \frac{a\sqrt[7]{a^4}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{a\sqrt[7]{a^4}}{a} = \sqrt[7]{a^4}$$

3º) Adição ou subtração no denominador:

Exemplos:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, que é *o fator racionalizante* da fração.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}=$$

$$\frac{2\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

b) $\dfrac{9}{4+\sqrt{5}}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por $4+\sqrt{5}$, que é *o fator racionalizante* da fração.

$$\frac{7}{4+\sqrt{5}}\cdot\frac{4-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=\frac{7.\left(4-\sqrt{5}\right)}{\left(4+\sqrt{5}\right).\left(4-\sqrt{5}\right)}=\frac{7.\left(4-\sqrt{5}\right)}{4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{7.\left(4-\sqrt{5}\right)}{16-5}=\frac{7.\left(4-\sqrt{5}\right)}{9}$$