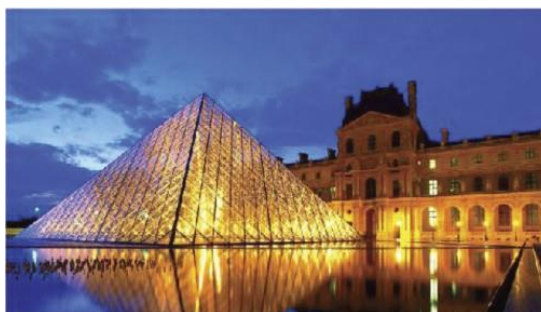


Unifra – verão - 2018

A Matemática se manifesta nas diferentes atividades humanas, estabelecendo relações pela codificação, quantificação, análise e interpretação, sempre permeando entre o visível e o invisível. Podemos vincular algumas de suas aplicações ao contexto da Copa do Mundo/2018, em que serão realizados sorteios, cálculos de possibilidades de classificação, otimização de tempo para deslocamentos, entre outros. Nesta prova, você fará uso de seus conhecimentos sobre funções, geometria, álgebra, problemas de combinatória e trigonometria, para encontrar soluções de alguns problemas clássicos que ocorrem nesse tipo de competição.

01. Muitos dos torcedores que se deslocarão para Moscou com o objetivo de assistir à Copa do Mundo, de 2018, farão uma escala em Paris. Um dos lugares mais visitados desta cidade francesa é o Museu do Louvre.



<https://4.bp.blogspot.com/-BdJGjNkg UTwNRLOl68pv- IGVE/plzl6vr0Ugw/s640/louvre-paris.jpg>

A pirâmide de vidro, na entrada do Museu do Louvre, em Paris, foi construída em 1984, com 24 m de altura e uma base quadrada com 18 m de apótema. Supondo que, por questão de economia, as dimensões do apótema da base e da altura da pirâmide fossem reduzidas à metade, sobre as novas medidas da pirâmide, seria correto afirmar que:

- I. A área lateral ficaria reduzida pela metade.
- II. A área total ficaria reduzida à quarta parte.
- III. O volume ficaria reduzido à oitava parte.

Está(ão) correta(s)

- a) apenas II.
- b) apenas I e II.
- c) apenas I e III.
- d) apenas II e III.
- e) I, II e III.

Resolução:

O teorema de Tales nos ajuda a resolver esta questão muito facilmente. Veja que as duas principais medidas, a altura e a apótema da base da pirâmide se reduzem à metade. Logo, as áreas (2 dimensões) se reduzem ao quadrado da área anterior, ou seja, o quadrado da metade é igual à quarta parte.

$$A_{\text{lateral}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot A_{\text{lateral}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{lateral}}$$

$$A_{\text{total}} \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot A_{\text{total}} = \frac{1}{4} \cdot A_{\text{total}}$$

Logo, a afirmação I é falsa e a II é verdadeira.

Em relação ao volume (3 dimensões), enquanto que as dimensões se reduzem à metade, o volume se reduz ao cubo, ou seja, à oitava parte.

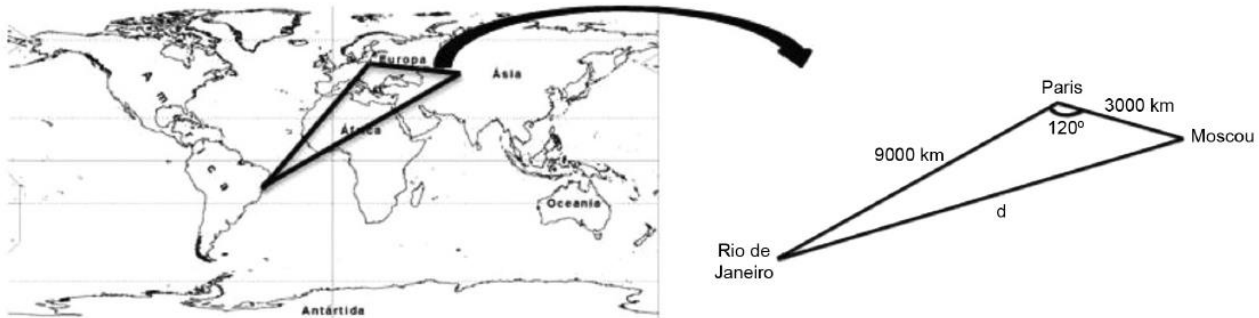
$$V \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V = \frac{1}{8} \cdot V$$

Assim, a afirmação III é verdadeira.

02. As viagens de avião são tediosas, demoradas e cansativas. Com o Brasil já classificado, a equipe de Tite já está planejando a viagem da seleção brasileira para o Mundial da Rússia, em 2018.

Opção 1: Os jogadores e a comissão técnica saem do RJ, chegam a Paris, esperam no aeroporto 1 hora e pegam outro voo para Moscou.

Opção 2: Os jogadores e a comissão técnica saem do RJ, chegam a Moscou em um voo sem escalas.



As distâncias entre as cidades estão representadas na figura acima e, em ambos os casos, o avião viaja a uma velocidade média de 800 km/h. Se decidirem pela opção 2, o tempo de viagem da delegação brasileira reduzirá em (considere: $\sqrt{7} = 2,6$ e $\sqrt{13} = 3,6$)

- a) 1 hora e 30 minutos.
- b) 1 hora e 50 minutos.
- c) 2 horas e 30 minutos.
- d) 2 horas e 50 minutos.
- e) 5 horas e 15 minutos.

Resolução:

Vamos inicialmente calcular a distância entre Rio de Moscou, usando a lei dos cossenos:

$$d^2 = 9000^2 + 3000^2 - 2 \cdot 9000 \cdot 3000 \cdot \cos 120^\circ$$

$$d^2 = 81 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^6 - 2 \cdot 9 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 = 90 \cdot 10^6 + 27 \cdot 10^6$$

$$d^2 = 117 \cdot 10^6$$

$$d = \sqrt{117 \cdot 10^6} = \sqrt{3^2 \cdot 13 \cdot 10^6}$$

$$d = 3 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{13} = 3 \cdot 1000 \cdot 3,6 = 10800 \text{ km}$$

Agora vamos analisar as opções:

Opção 1: Rio – Paris – Moscou → distância percorrida = 9000 + 3000 = 12000 km.

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12000 \text{ km}}{800 \text{ km/h}} = 15 \text{ h}$$

São 15 horas de voo mais 1 hora de espera no aeroporto de Paris.

Tempo total → 15 h + 1 h = **16 horas.**

Opção 2: Rio – Moscou → distância percorrida = 10800 km

$$t = \frac{d}{v} = \frac{10800 \text{ km}}{800 \text{ km/h}} = 13,5 \text{ h}$$

Tempo total → **13,5 horas.**

Logo, o tempo se reduzirá em:

$$16 \text{ h} - 13,5 \text{ h} = 2,5 \text{ h} = \mathbf{2 \text{ h } 30 \text{ min}}$$

03. A matemática de Newton permitiu "ver" as forças invisíveis que mantêm a Terra girando em torno do Sol. Em ordem de distância a partir do Sol, os planetas conhecidos são: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Netuno e Plutão. Quanto mais distante do Sol, maior o período de translação do planeta, ou seja, mais tempo ele gasta para dar uma volta completa ao redor do Sol. Os planetas Mercúrio e Vênus têm períodos de translação em torno do Sol de, aproximadamente, 90 e 230 dias, nesta ordem. No dia do sorteio da Copa do Mundo da Rússia/2018, 01 de dezembro de 2017, os planetas Mercúrio e Vênus estarão em uma determinada posição. Esses dois planetas irão ocupar, simultaneamente, as mesmas posições no ano de

- a) 2020.
- b) 2021.
- c) 2022.
- d) 2023.**
- e) 2024.

Resolução:

Resolvemos esta questão, calculando o MMC entre 90 e 230.

$$\text{MMC}(90, 230) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23 = 2070 \text{ dias.}$$

Vamos considerar 1 ano com 365 dias. Logo:

$$\frac{2070}{365} = 5,67 \text{ anos}$$

Como em 01 de dezembro de 2017, os planetas Mercúrio e Vênus estavam numa determinada posição, eles vão ocupar a mesma posição em $2017 + 5,67 = 2022,67$ ou seja, durante o ano **de 2023**.

04. Quando o assunto é olhar para o futuro, podemos com a matemática "prever" algumas situações que ainda não aconteceram. Segundo o censo russo, a população da cidade de Sochi, uma das cidades-sede da copa da Rússia/2018, em janeiro de 2010 era de 260.000 habitantes e, em janeiro de 2017, foi de 278.200 habitantes.

Supondo o crescimento populacional constante e linear, assinale **V** (verdadeiro) ou **F** (falso) para as afirmações feitas.

- () Em 2022, a população terá crescido 13% na comparação com o ano de 2010.
- () A população de Sochi irá ultrapassar a marca de 300.000 habitantes no decorrer do ano de 2025.
- () A taxa de crescimento populacional da cidade de Sochi, em relação a 2010, é de 1% ao ano.

A sequência correta é

- a) V-F-V.
- b) F-V-V.**
- c) F-F-V.
- d) V-F-F.
- e) F-V-F.

Resolução:

Em 2010, temos 260.000 habitantes, e em, 2017, 278.200 habitantes. Fazendo $t = 0$ como ano de 2010 e $t = 7$ como ano de 2017, teremos os pares ordenados:

$$(0, 260000)$$

$$(7, 278200)$$

Vamos determinar a taxa de crescimento anual (coeficiente angular):

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{278200 - 260000}{7 - 0} = \frac{18200}{7} = 2600$$

Logo, a cada ano temos um incremento populacional de 2600 pessoas.

Como em 2010 temos 260000 pessoas, o crescimento percentual anual é:

$$260000 \text{ pessoas} \text{ ---- } 100\%$$

$$2600 \text{ pessoas} \text{ ----- } x$$

$$x = \frac{2600 \cdot 100}{260000} = 1\%$$

Com isso, podemos concluir que a 3ª afirmativa é verdadeira.

Como o crescimento anual é 1 % ao ano, e é linear, no ano de 2022, quanto $t = 12$, teremos um crescimento percentual de 2010 ($t = 0$) até 2022 ($t = 12$) no valor de 12%.

Assim, a 1ª afirmação é falsa.

O crescimento é linear, logo, a função é afim do tipo $y = at + b$.

No tempo $t = 0$, temos o $b = 260000$ (coeficiente linear).

Assim, $y = 2600.t + 260000$

Em 2025, o $t = 15$. Assim:

$$y = 2600.15 + 260000 = 299.000.$$

Portanto, no decorrer do ano de 2025, teremos uma população de mais de 300.000 habitantes (lembre a taxa de crescimento anual é de 2600 pessoas).

Concluimos que a 2ª afirmativa é verdadeira.

05. A FIFA realizará o sorteio da Copa do Mundo/2018 no Kremlin. O evento está agendado para daqui a 4 dias, ou seja, 1º de dezembro de 2017, e servirá para determinar os grupos do torneio. Vamos pensar em uma situação com o *ranking* das seleções divulgado no dia 16 de outubro de 2017. As 32 seleções serão divididas em quatro potes:

Pote 1: (conforme o *ranking*, 8 equipes cabeças de chave): Rússia (país sede), Alemanha, Brasil, Portugal, Argentina, Bélgica, Polônia e França.

Pote 2: 4 equipes da Europa, 3 da América do Sul e 1 da América Central.

Pote 3: 8 equipes da Europa e América Central.

Pote 4: 8 equipes da África, Ásia e América do Norte.

Sabendo que cada um dos 8 grupos é formado por 4 equipes, o número de possibilidades para definir a chave do Brasil (considere que o grupo do Brasil será o primeiro a ser formado e as equipes sul-americanas não podem se enfrentar na fase de grupos) é

a) 320.

b) 512.

c) 1920.

d) 2240.

e) 4096.

Resolução:

Pote 1 → 1 equipe (Brasil) → **1**

Pote 2 → 4 equipes da Europa e 1 da América Central (não pode ser sorteado equipes sul-americanas) → **5**

Pote 3 → as 8 equipes da Europa e América Central → **8**

Pote 4 → 8 equipes da África, Ásia e América do Norte → **8**

Usando o princípio multiplicativo da contagem, temos:

$$1.5.8.8 = \mathbf{320} \text{ possibilidades para a chave do Brasil.}$$